Αλγεβρικές Δομές

07.04.2016

Θεώρημα Lagrange

Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα. Θεωρούμε ένα υποσύνολο $H \subseteq G$ και ορίζουμε μια σχέση R_H επί του G, ως εξής:

$\forall\, x,y \in G:\ x \sim_{R_H} y \overset{op}{\iff} x^{-1} y \in H.$

Πρόταση: Το υποσύνολο H είναι υποομάδα της $G \iff$ η σχέση R_H είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη: "$\Longrightarrow$" Έστω ότι $H \leq G$

• $\forall\, x \in G:\ x^{-1} \cdot x = e \in H$, διότι $H \leq G \Rightarrow x \sim_{R_H} x,\ \forall x \in G$ [Άρα ισχύει η ανακλ.]

• Έστω $x,y \in G$ και έστω ότι $x \sim_{R_H} y \Rightarrow x^{-1} \cdot y \in H \overset{H \leq G}{\Longrightarrow} (x^{-1} y)^{-1} \in H$
$\Rightarrow y^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow y^{-1} \cdot x \in H \Rightarrow y \sim_{R_H} x$ [Άρα ισχύει η συμμετρική ιδ.]

• Έστω $x,y,z \in G$ και έστω $\left.\begin{array}{l} x \sim_{R_H} y \\ y \sim_{R_H} z \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^{-1} \cdot y \in H \\ y^{-1} \cdot z \in H \end{array}\right| \overset{H \leq G}{\Rightarrow}$

$\Longrightarrow x^{-1} \cdot y \cdot y^{-1} \cdot z \in H \Rightarrow x^{-1} \cdot e \cdot z = x^{-1} \cdot z \in H$

$\Rightarrow x \sim_{R_H} z$. [Άρα ισχύει η μεταβατική ιδιότητα.]

"$\Leftarrow$" Υποθέτουμε ότι η R_H είναι σχέση ισοδυναμίας επί του G.

Από την ανακλαστική ιδιότητα $\Rightarrow x \sim_{R_H} x, \ \forall x \in G$. Ιδιαίτερα για $x = e$, θα έχουμε $e \sim_{R_H} e \Rightarrow e^{-1} \cdot e = e \in H$. Ιδιαίτερα $H \neq \emptyset$

• Έστω $x \in H$: $x = e \cdot x = e^{-1} \cdot x \in H \Rightarrow e \sim_{R_H} x$

$\xrightarrow{R_H: \text{συμμετρική}} x \sim_{R_H} e \Rightarrow x^{-1} \cdot e = x^{-1} \in H$.

Έστω $x, y \in H$. Τότε: $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H \Rightarrow x^{-1} \sim_{R_H} e$

$y \in H \Rightarrow y^{-1} \in H \Rightarrow y^{-1} \sim_{R_H} e \xRightarrow{R_H: \text{συμ.}} e \sim_{R_H} y^{-1}$ $\xRightarrow{R_H \text{ μετ.}}$

$\Rightarrow x^{-1} \sim_{R_H} y^{-1} \Rightarrow (x^{-1})^{-1} \cdot y^{-1} \in H \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H$.

$\Rightarrow H \leq G$

Άρα: $H \leq G \Leftrightarrow$ η σχέση: $\forall x, y \in G: x \sim_R y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H$

είναι σχ. ισοδυναμίας επί του G

Παρόμοια ορίζουμε:

$\forall x, y \in G: \ x \sim_R y \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in H$.

Τότε με παρόμοια απόδειξη έχουμε: $H \leq G \Leftrightarrow {}_H R$: σχ. ισοδ επί του G

• Αν $H \leq G$, θα εργαζόμαστε με τη σχ. ισοδ. R_H επί του G.

Έστω $x \in G$. Θα γράφουμε: $[x]_H = [x]_{R_H}$, και τότε:

$[x]_H = \{y \in G \mid y \sim_{R_H} x\} = \{y \in G \mid x \sim_{R_H} y\}$: η κλάση ισοδυναμίας του $x \in G$ ως προς την R_H

$[x]_H = \{y \in G \mid x \sim_{R_H} y\} = \{y \in G \mid x^{-1} \cdot y \in H\} = \{y \in G \mid x^{-1} \cdot y = h \in H\} =$
$= \{y \in G \mid y = x \cdot h$, όπου $h \in H\} = \{x h \in G \mid h \in H\} \overset{op}{=} xH$.

Άρα: $[x]_H = xH \longrightarrow$ αριστερή πλευρική κλάση του x ως προς την H | ή Αριστερό σύμπλοκο του x ως προς την H.

Παρόμοια, θέτοντας ${}_H[x] = [x]_{{}_HR}$: η κλάση ισοδυναμίας του x ως προς τη R_H

Θα έχουμε: ${}_H[x] = H \cdot x \overset{op}{=} \{h \cdot x \in G / h \in H\}$ δεξιά πλευρική κλάση του x ως προς H
ή
δεξιό σύμπλοκο του x ως προς H

<u>ΛΗΜΜΑ</u>: Αν $H \leq G$, τότε: $\forall x \in H : |xH| = |Hx| = |H|$

<u>Απόδειξη</u>: Ορίζουμε απεικόνιση $f : xH \to Hx$, $f(xh) = hx$

Έστω $f(xh_1) = f(xh_2) = h_1 x = h_2 x \Rightarrow h_1 \underbrace{x \cdot x^{-1}}_{e} = h_2 x \cdot x^{-1} \Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow 1-1$

Η f είναι επί, διότι: $\forall h \cdot x \in Hx$, θα έχουμε $f(x \cdot h) = h x$

Άρα $|xH| = |Hx|$, $\forall\, x \in G$.

Ιδιαίτερα, για $x=e$: $|eH| = |\{eh \in G \mid h \in H\}| = |\{h \in G \mid h \in H\}| = |H|$

Έστω $x, y \in G$, τότε: ορίζουμε απεικόνιση $g: xH \to yH$, $g(xh) = yh$. Η g είναι 1-1, διότι: $g(xh_1) = g(xh_2) \Rightarrow yh_1 = yh_2$ $\Rightarrow y^{-1} y \cdot h_1 = y^{-1} y\, h_2 \Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow xh_1 = xh_2$

Η g είναι επί, διότι $\forall\, yh \in yH$: $g(xh) = yh$.

Άρα: $\forall\, x, y \in G$: $|xH| = |yH|$. Για $x \in G$ και $y = e \in G$, θα έχουμε $|xH| = |H|$, $\forall\, x \in G$

$H \leq G$

$\forall x, y \in G$: $x \sim_{R_H} y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H$: σχ. ισοδ. κ' $[x]_H = xH$ η κλάση ισοδ. του x ως προς R_H

$\forall\, x, y \in G$: $x\ {}_H\!\!\sim_{R} y \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in H$: σχ. ισοδ. κ' ${}_H[x] = Hx$ η κλάση ισοδ. του x ως προς ${}_H R$

$[x]_H = xH$ = αριστερή πλευρική κλάση του x ως προς H

${}_H[x] = Hx$: δεξιά πλευρική κλάση του x " " H

Πρόταση: Έστω $H \leq G$ και έστω $G/\mathcal{R}_H$ και $G/{}_H\mathcal{R}$ τα σύνολα πηλίκα της G ως προς τις σχ. ισοδυναμίας $\mathcal{R}_H$ και ${}_H\mathcal{R}$. Τότε: $|G/\mathcal{R}_H| = |G/{}_H\mathcal{R}|$

$$\begin{cases} G/\mathcal{R}_H = \{[x]_H = xH \subseteq G \mid x \in G\} \\ G/{}_H\mathcal{R} = \{{}_H[x] = Hx \subseteq G \mid x \in G\} \end{cases}$$

Απόδειξη: Ορίζουμε: $f: G/\mathcal{R}_H \to G/{}_H\mathcal{R}$, $f(xH) = Hx^{-1}$, δηλαδή $f([x]_H) = {}_H[x^{-1}]$

Έστω $[x]_H = [y]_H$, δηλαδή $xH = yH$. ΘΔο $f(xH) = f(yH)$, δηλαδή ότι: $Hx^{-1} = Hy^{-1}$. Τότε $[x]_H = [y]_H \Rightarrow x \sim_{\mathcal{R}_H} y \Rightarrow x^{-1} \cdot y \in H \Rightarrow x^{-1} y = h \in H$
$\Rightarrow x^{-1} = h \cdot y^{-1} \in Hy^{-1} \Rightarrow x^{-1} \in Hy^{-1} = {}_H[y^{-1}] \Rightarrow {}_H[x^{-1}] = {}_H[y^{-1}] \Rightarrow$
$\Rightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1} \Rightarrow f([x]_H) = f([y]_H) \Rightarrow f$: είναι καλά ορισμένη.

- Η f: 1-1: Έστω ότι: $f([x]_H) = f([y]_H) \Rightarrow f(xH) = f(yH) \Rightarrow$
$\Rightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1} \Rightarrow {}_H[x^{-1}] = {}_H[y^{-1}] \Rightarrow x^{-1} \sim_{{}_H\mathcal{R}} y^{-1} \Rightarrow x^{-1} (y^{-1})^{-1} = x^{-1} \cdot y \in H \Rightarrow$
$\Rightarrow x^{-1} y = h \in H \Rightarrow y = x \cdot h$, όπου $h \in H \Rightarrow y \in xH = [x]_H \Rightarrow x \sim_{\mathcal{R}_H} y \Rightarrow$
$\Rightarrow [x]_H = [y]_H$. Άρα η f: 1-1.

- Η f είναι επί: Έστω ${}_H[x] = Hx$. Τότε $f([x^{-1}]_H) = {}_H[x]$: δηλαδή $f(x^{-1}H) = Hx \Rightarrow f$: επί. Άρα $|G/\mathcal{R}_H| = |G/{}_H\mathcal{R}|$

<u>Ορισμός:</u> Αν $H \leq G$, τότε ο δείκτης της H στην G είναι

$[G:H] = |G/R_H| = |G/_H R|$

Δηλαδή ο δείκτης της H στην G μετράει το πλήθος των διαφορετικών δεξιών ή αριστερών πλευρικών κλάσεων της H στην G.

→ Από τώρα και στο εξής: υποθέτουμε ότι: $|G| = n < \infty$.

Τότε για κάθε υποομάδα $H \leq G$, θα έχουμε $|H| = m < \infty$

Επειδή $[G:H] = |G/R_H| \Rightarrow$

$\Rightarrow [G:H] = k < \infty$.

<u>Πρόβλημα:</u> Υπάρχει σχέση μεταξύ των $|G|, |H|, [G:H]$;

Επειδή $k = [G:H] < \infty$, έπεται ότι $G/R_H = \{x_1 H = [x_1]_H, x_2 H = [x_2]_H, \ldots, x_k H = [x_k]_H\}$

Επειδή τα σύνολα είναι (αριστερές πλευρικές κλάσεις) $[x_1]_H \ldots [x_k]_H$, αποτελούν διαμέριση της G έπεται ότι

$G = [x_1]_H \cup [x_2]_H \cup \ldots \cup [x_k]_H$ (ξένη ένωση)

$$\boxed{\begin{array}{l} X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k \\ |X| = \sum_{i=1}^{k} |X_i| \end{array}}$$

$\Rightarrow |G| = |[x_1]_H| + |[x_2]_H| + \ldots +$

$+ |[x_k]| = |x_1 H| + |x_2 H| + \ldots + |x_k H|$

$= |H| + |H| + \ldots + |H| = k \cdot H = [G:H] \cdot |H|$

ΘΕΩΡΗΜΑ: [Lagrange (1771)] Αν G είναι μια πεπερασμένη ομάδα τότε: $|H| \mid |G|$ και μάλιστα: $|G| = |H| \cdot [G:H]$